Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Al treilea test de selecţie pentru juniori
Bucureşti, 10 mai 2009

Problema 1. Fie a, b, c trei numere reale strict pozitive astfel încât

$$a+b+c \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Să se arate că

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}.$$

Problema 2. Fie a şi b două numere naturale. Să se arate că mulţimea numerelor naturale n, pentru care numărul

$$\left(a+\frac{1}{2}\right)^n+\left(b+\frac{1}{2}\right)^n$$

este întreg, este finită.

Problema 3. Se consideră reţeaua plană de triunghiuri echilaterale de latură 1. Un "pion" aflat într-un triunghi poate fi mutat într-un triunghi cu care are un vârf comun şi laturile opuse acestui vârf paralele. Numim *drum* o succesiune finită de mutări. Să se arate că nu există niciun drum între două triunghiuri cu o latură comună.

Problema 4. Considerăm K un poligon în plan, astfel încât distanţa între oricare două vârfuri ale sale să fie mai mică sau egală cu 1. Fie X şi Y două puncte situate în interiorul poligonului K. Să se arate că există (cel puţin) un punct Z, situat pe conturul poligonului K, astfel încât $|XZ| + |YZ| \leq 1$.

Timp de lucru 4 ore
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte